100 Preguntas Test
Probabilidad Combinatoria
y Variables Aleatorias 1-DIM

M.A. Fiol
Departament de Matemàtica Aplicada IV
Universitat Politècnica de Catalunya
email: `fiol@mat.upc.es`
webpage: `www-ma4.upc.es/~fiol`

Abstract

Se presentan cien preguntas test sobre los temas de probabilidad axiomática, probabilidad combinatoria y variables aleatorias unidimensionales, la mayoría de las cuales han sido propuestas en exámenes de la asignatura *"Probabilidad y Procesos Estocásticos"* en la "E.T.S. Enginyería de Telecomunicació" de la UPC. Cada pregunta tiene exactamente una respuesta correcta, indicada a continuación de la misma. Para un 50% aproximadamente de preguntas, también se incluye una (posible) resolución completa. Se agradecen comentarios generales y/o avisos sobre posibles errores en `fiol@mat.upc.es`.

Teoria de la probabilidad

1. Si A y B son dos sucesos disjuntos e independientes, entonces se puede afirmar:

(a) $P(B) \neq 0 \Rightarrow P(A|B) > P(B)$

(b) $P(A) \neq 0 \Rightarrow P(B|A) = 0$

(c) $P(A \cup B) < P(A) + P(B)$

(d) $P(A) = P(B) = 0$

2. Si A y B son dos sucesos disjuntos e independientes, entonces se puede afirmar:

(a) $P(A \cup B) < P(A) + P(B)$

(b) $P(B) \neq 0 \Rightarrow P(A|B) > P(B)$

(c) $P(A) = 0$ ó $P(B) = 0$

(d) $P(A) \neq 0 \Rightarrow P(B|A) > 0$

3. Sean A, B, C tres sucesos tales que A es independiente de $\overline{B} \cap C$ y de $B \cap C$. Entonces se puede afirmar que:

(a) A, B, C son sucesos independientes

(b) A es independiente de C

(c) A es independiente de B

(d) ninguna de las otras

4. Sean A, B, C tres sucesos tales que A es independiente de $\overline{B}$ y de C. Entonces se puede afirmar que:

(a) A, B, C son sucesos independientes

(b) $\overline{B}$ es independiente de C

(c) ninguna de las otras

(d) A es independiente de $B \cap C$

5. Sean A, B, C tres sucesos tales que A es independiente de B, de C, y de $B \cap C$. Entonces se puede afirmar que:

(a) A, B, C no son sucesos independientes

(b) B es independiente de C

(c) A es independiente de $A \cap B \cap C$

(d) A es independiente de $B \cup C$

6. Sean A, B, C tres sucesos tales que A es independiente de B y de C. Entonces se puede afirmar que:

(a) A, B, C no son sucesos independientes

(b) A es independiente de $B \cap C$ si y sólo si es independiente de $B \cup C$

(c) A es independiente de $A \cap B \cap C$

(d) A, B, C son sucesos independientes a pares

7. De una colección de 100 programas de estudiantes examinados en el Centro de Cálculo, se vió que 20 contenían errores de sintáxis, 10 errores de I/O, 5 errores de otro tipo, 6 errores de sintáxis e I/O, 3 errores de sintáxis y de otro tipo, 2 errores de I/O y de otro tipo, 1 errores de las tres clases. La probabilidad de que un programa escogido aleatoriamente tenga algún tipo de error es:

(a) 0.20
(b) 0.25
(c) 0.30
(d) 0.35

8. Sean A, B, C tres sucesos tales que las probabilidades $\mathrm{P}(B \cap C)$, $\mathrm{P}(\overline{B} \cap C)$ y $\mathrm{P}(C)$ son no nulas. Entonces, la expresión

$$\mathrm{P}(A \cap B | B \cap C)\mathrm{P}(B|C) + \mathrm{P}(A \cap B | \overline{B} \cap C)\mathrm{P}(\overline{B}|C)$$

es igual a:

(a) $\mathrm{P}(A \cap B|C)$
(b) $\mathrm{P}(A \cap B)$
(c) $\mathrm{P}(A|C)$
(d) Ninguna de las otras

9. Sean A, B, C tres sucesos tales que las probabilidades $\mathrm{P}(B \cap C)$, $\mathrm{P}(\overline{B} \cap C)$ y $\mathrm{P}(C)$ son no nulas. Entonces, la expresión

$$\mathrm{P}(A|B \cap C)\mathrm{P}(B|C) + \mathrm{P}(A|\overline{B} \cap C)\mathrm{P}(\overline{B}|C)$$

es igual a:

(a) $\mathrm{P}(A|B \cap C)$
(b) $\mathrm{P}(A|C)$
(c) $\mathrm{P}(A \cap C)$
(d) Ninguna de las otras

10. Sea $\mathcal{E} = (\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ un espacio de probabilidad y sean $A_1, A_2, A_3, \ldots \in \mathcal{A}$. Entonces se puede afirmar:

(a) $P(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n) = P(A_1)$
(b) $P(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$
(c) $P(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$
(d) $P(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \lim_{n\to\infty} P(A_n)$

11. Si se elige un número natural al azar, la probabilidad de que sea divisible por 3 ó por 5 es:

(a) 7/15
(b) 8/15
(c) 3/5
(d) 1/3

12. Si se elige un número natural al azar, la probabilidad de que no sea divisible ni por 3 ni por 5 es:

(a) 7/15
(b) 3/5
(c) 1/3
(d) 8/15

13. Tres jugadores A,B y C, de igual maestría, están jugando una serie de partidas en las que el ganador de cada una consigue un punto. Gana el juego el que primero consiga tres puntos. Si A gana la primera y tercera partida, y B gana la segunda, ¿Cuál es la probabilidad de que C gane el juego?

(a) $\frac{1}{3^3}$
(b) $\frac{2}{3^3}$
(c) $\frac{1}{3^2}$
(d) $\frac{1}{3}$

14. Un circuito tiene n interruptores, conectados en paralelo, que se cierran (`'on'`) de forma independiente con probabilidad $1/n$. Entonces si n es muy grande, la probabilidad de que se establezca la conexión es, aproximadamente:

(a) $e - 2$
(b) $(e - 1)^{-1}$
(c) e^{-1}
(d) $1 - e^{-1}$

15. Un circuito tiene n interruptores, conectados en serie, que estan abiertos (`'off'`) de forma independiente con probabilidad $1/n$. Entonces si n es muy grande, la probabilidad de que no se establezca la conexión es, aproximadamente:

(a) e^{-1}

(b) $(e-1)^{-1}$

(c) $1-e^{-1}$

(d) $e-2$

16. Si se eligen al azar $n \geq 3$ puntos sobre una circunferencia, ¿Cuál es la probabilidad de que estén todos en una misma semicircunferencia?

(a) $n(\frac{1}{2})^{n-1}$

(b) $(\frac{1}{2})^{n}$

(c) $(\frac{1}{2})^{n-1}$

(d) ninguna de las otras

17. Se eligen al azar 3 puntos sobre una superficie esférica, ¿Cuál es la probabilidad de que estén todos en una misma semiesfera?

(a) $\frac{1}{2}$

(b) 1

(c) $\frac{1}{4}$

(d) $\frac{1}{3}$

18. Diez amigos eligen, de forma independiente, un número de la lotería primitiva (entre 1 y 49). La probabilidad de que al menos dos de ellos elijan un mismo número es, aproximadamente,

(a) $0,374$

(b) $0,567$

(c) $0,379$

(d) $0,626$

Combinatoria y fórmula de Bayes

19. Diez amigos $a, b, c, \ldots$ se sientan aleatoriamente en una mesa circular. La probabilidad de que a se siente entre b y c es:

(a) $1/72$

(b) $1/40$

(c) $1/45$

(d) $1/36$

20. De una baraja española se eligen 4 cartas al azar. La probabilidad de que sean de palos y números distintos es:

(a) $\frac{36}{47}\frac{24}{46}\frac{12}{45}$

(b) $\frac{44}{47}\frac{40}{46}\frac{36}{45}$

(c) $\frac{33}{47}\frac{20}{46}\frac{9}{45}$

(d) $\frac{36}{47}\frac{21}{46}\frac{6}{45}$

21. De una baraja española se eligen 4 cartas al azar. La probabilidad de que sean de palos distintos y números consecutivos es (aproximadamente):

(a) $0,11$

(b) $0,011$

(c) $0,005$

(d) $0,0011$

22. De una baraja francesa (52 cartas entre las cuales hay 4 comodines), se eligen 5 cartas. La probabilidad de elegir al menos un comodín es, aproximadamente:

(a) $0,34$

(b) $0,67$

(c) $0,31$

(d) $0,69$

23. Por una línea telegráfica se mandan mensajes compuestos por 100 caracteres, cada uno de los cuales se codifica con 5 bits (es decir, 500 bits/mensaje). La probabilidad de recepción errónea de un bit es $p = 10^{-5}$. ¿Cuál es, aproximadamente, la probabilidad de recibir un mensaje erróneo?

(a) $\frac{1}{100}$

(b) $\frac{1}{200}$

(c) $\frac{1}{300}$

(d) $\frac{1}{400}$

24. Se lanza un par de dados 6 veces. La probabilidad de obtener exactamente 2 veces (de las 6) una suma de puntos menor que 5, y exactamente 1 vez una suma de puntos mayor que 8 vale, aproximadamente,

(a) 0.079

(b) 0.008

(c) 0.113

(d) 0.050

25. De una baraja española (4 palos de 12 cartas cada uno) se eligen 5 cartas al azar. La probabilidad de que entre ellas haya al menos un as y al menos un rey es, aproximadamente,

(a) 0.116
(b) 0.750
(c) 0.884
(d) 0.232

26. Supóngase que 5 terminales están conectados mediante una línea compartida a un computador central. El computador central va preguntando por turno a los diversos terminales si tienen algo que transmitir. Si la respuesta es afirmativa, el terminal accede a la línea. Supóngase que todos los terminales tienen igual probabilidad de tener algo que transmitir. Entonces, si hay 3 terminales que quieren enviar un mensaje, la probabilidad de que el computador haga 2 preguntas hasta encontrar un terminal que quiere transmitir es

(a) 0.3
(b) 0.4
(c) 0.5
(d) 0.6

27. Se sabe que, al encontrarse con dos hermanas al azar de un total de n, la probabilidad de que ambas tengan los ojos azules es 1/2. Entonces, un posible valor de n es:

(a) 3
(b) 4
(c) 5
(d) 6

28. Un sistema de transmisión tiene como símbolos de entrada $\{0, 1\}$ y como símbolos de salida $\{a, b\}$. La emisión de 0 y 1 es equiprobable. Se sabe que cuando se emite 0, la probabilidad de recibir b es doble que la de recibir a. También, que al mandar 1, a y b se reciben equiprobablemente. Supóngase que se recibe a. Entonces la probabilidad de haber emitido 0 es:

(a) 1/5
(b) 2/5
(c) 3/5
(d) 4/5

29. Una apuesta quinielística consiste en poner todo 1's (en total se juegan 14 partidos). Si las probabilidades de salir 1,X,2 son, respectivamente, $\mathrm{P}(1) = 0.6$, $\mathrm{P}(X) = 0.3$ y $\mathrm{P}(2) = 0.1$, la probabilidad de acertar exactamente 12 resultados es:

(a) $\binom{14}{2}(0.6)^{12}\frac{12}{100}$
(b) $\binom{14}{2}(0.6)^{12}(0.3)^2$
(c) $\binom{14}{2}(0.6)^{12}\frac{13}{100}$
(d) $\binom{14}{2}(0.6)^{12}\frac{16}{100}$

30. Una quiniela se rellena con catorce 1's. Si la probabilidad de que el equipo de casa gane es $\mathrm{P}(1) = 1/2$, la de que empate $\mathrm{P}(\mathrm{X}) = 3/10$, y la de que pierda $\mathrm{P}(2) = 1/5$, se tiene que la probabilidad de obtener exactamente 13 aciertos es:

(a) $(\frac{1}{5} + \frac{3}{10}) \cdot 2^{-14}$
(b) $\frac{3}{10} \cdot \frac{1}{5} \cdot 2^{-13}$
(c) $14 \cdot 2^{-14}$
(d) $13 \cdot 2^{-13}$

31. Una bolsa contiene 3 bolas cada una de las cuales puede ser blanca o negra con igual probabilidad. Se extrae una bola, que resulta ser blanca, y se reintroduce en la bolsa. ¿Cuál es la probabilidad de que la bolsa contenga más bolas negras que blancas?

(a) 1/4
(b) 1/2
(c) 2/3
(d) 1/3

32. Una bolsa contiene 5 bolas, cada una de las cuales puede ser blanca o negra con igual probabilidad. Se extraen 3 bolas y resultan ser 2 blancas y 1 negra. ¿Cuál es la probabilidad de que la bolsa contenga más bolas negras que blancas?

(a) 1/4
(b) 1/2
(c) 1/3
(d) 1/5

33. Entre los números $1, 2, \ldots, 50$ se escoge uno al azar. La probabilidad de que el número escogido sea divisible por 6 ó por 8 es:

(a) 7/25
(b) 1/25
(c) 6/25
(d) 12/25

34. Entre los números $1, 2, 3 \ldots, 24n$ se escoge uno al azar. La probabilidad de que el número escogido sea divisible por 6 o por 8 es:

(a) $\frac{6n+1}{24n}$
(b) $\frac{7}{24}$
(c) $\frac{1}{4}$
(d) $\frac{1}{3}$

35. Se tienen dos cajas, A y B, conteniendo cada una de ellas m bolas blancas y n bolas negras, $m + n = N$. Se elige al azar una bola de la caja A y se reemplaza por otra de la caja B, también elegida al azar. Entonces, si X denota el número de bolas blancas que quedan en la caja A, se cumple:

(a) $\mathrm{P}(X \in \{n-1, n+1\}) = \frac{mn}{N^2}$
(b) $\mathrm{P}(X = n-1) = \mathrm{P}(X = n+1) = \frac{2mn}{N^2}$
(c) $\mathrm{P}(X \notin \{n-1, n+1\}) = \frac{mn}{N^2}$
(d) $\mathrm{P}(X = n) = 1 - \frac{2mn}{N^2}$

36. Se tienen dos cajas, A y B, conteniendo cada una de ellas n bolas blancas y m negras ($m+n = N$). Se elige al azar una bola de la caja A y se reemplaza por otra de la caja B, también elegida al azar. Entonces el número X de bolas blancas que quedan en la caja A satisface:

(a) $P(X = n) = 1 - 2\frac{mn}{N^2}$
(b) $P(X = n+1) = \frac{m(n+1)}{N^2}$
(c) $P(X = n-1) = \frac{m(n-1)}{N^2}$
(d) ninguna de las otras

37. De una caja que contiene n bolas blancas y n bolas negras, se extrae primero una bola al azar (sin mirarla) y después se extraen $n-1$ bolas que resultan ser todas blancas. Entonces, para n muy grande, la probabilidad de que la primera bola extraida sea negra es, aproximadamente,

(a) 0
(b) 2/3
(c) 1/2
(d) 1

38. De una caja que contiene n bolas blancas y n bolas negras, se extrae primero una bola al azar y se mete en otra caja que también contiene n bolas blancas y n negras. De esta segunda caja se extraen n bolas que resultan ser todas blancas. Entonces, para n muy grande, la probabilidad de que la primera bola extraida sea negra es, aproximadamente,

(a) 1/2
(b) 0
(c) 1
(d) 2/3

39. Un jugador juega tres partidas p_1, p_2, p_3 con probabilidades $1/4, 1/4, 1/2$, respectivamente. Las probabilidades de ganar son 1/2 (jugando p_1), 1/4 (jugando p_2) y 1/8 (jugando p_3). Sabiendo que ha ganado, ¿cuál es la probabilidad de que haya jugado la partida p_2?:

(a) 1/2
(b) 1/4
(c) 1/8
(d) 2/3

40. Un jugador juega tres partidas p_1, p_2, p_3 con probabilidades $1/4, 1/4, 1/2$, respectivamente. Las probabilidades de ganar son 1/2 (jugando p_1), 1/4 (jugando p_2) y 1/8 (jugando p_3). Sabiendo que ha ganado, ¿cuál es la probabilidad de que haya jugado la partida p_1?:

(a) 2/3
(b) 1/8
(c) 1/2
(d) 1/4

Variables aleatorias

41. Sea X una variable aleatoria con función de distribución $F_X(x) = (1 - e^{-\alpha x})u(x - a)$, donde $\alpha \in \mathbb{R}$, $u(x)$ es la función escalón (o de Heaviside) y $a \in \mathbb{R}^+$. Entonces los valores de α y $P(X = a)$ son, respectivamente,

(a) cualquiera negativo, $e^{-\alpha a}$

(b) 1, 0

(c) 1, $e^{-\alpha a}$

(d) cualquiera positivo, $1 - e^{-\alpha a}$

42. Sea X una variable aleatoria geométrica. Consideramos el suceso $B = \{X \leq 2\}$. Entonces, la función de probabilidad $P_Y(k)$ de la variable condicionada $Y = X|B$ es:

(a) $\frac{q^k}{1+q^2}$, $k = 0, 1$

(b) $\frac{q^{k-1}}{1-q^2}$, $k = 1, 2$

(c) $\frac{q^{k-1}}{1-q}$, $k = 1, 2, 3$

(d) $\frac{q^{k-1}}{1+q}$, $k = 1, 2$

43. Dada la variable aleatoria X con función de distribución

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{x+1}{2}, & 0 \leq x < 1 \\ 1, & x \geq 1 \end{cases}$$

¿cuál de las siguientes afirmaciones es falsa?

(a) $f_X(1/2) = 1/2$

(b) $\mathrm{P}(X = 0) = 1/2$

(c) $\mathrm{P}(X = 1) > 0$

(d) $P(X \leq 3/4) - P(X \leq 1/4) > 0$

44. Sea X una variable aleatoria geométrica. Consideramos el suceso $B = \{X \leq 10\}$. Entonces, la función de probabilidad $P_Y(k)$ de la variable condicionada $Y = X|B$ cumple:

(a) $P_Y(10) = \frac{pq^9}{1-q^{10}}$

(b) $P_Y(10) = 1$

(c) $P_Y(10) = \frac{pq^{10}}{1+q^{10}}$

(d) $P_Y(10) = \frac{q^9}{1-q^{10}}$

45. Sea A un suceso y X una variable aleatoria continua con función de densidad $f_X(x) > 0$ para un cierto x. Entonces la probabilidad condicionada $P(A|X = x)$ es

(a) $\frac{\mathrm{P}(A, X=x)}{f_X(x)}$

(b) $\frac{f_{X|A}(x)}{\mathrm{P}(X=x)}$

(c) $\frac{f_{X|A}(x)\mathrm{P}(A)}{f_X(x)}$

(d) $\frac{\mathrm{P}(X=x|A)\mathrm{P}(A)}{\mathrm{P}(X=x)}$

46. Un sistema tiene una tasa de fallos $\beta(t) = t$. Entonces la probabilidad de que funcione al menos $t = 2$ es:

(a) e^{-1}

(b) e^{-2}

(c) $1 - e^{-1}$

(d) $1 - e^{-2}$

47. Un sistema tiene una tasa de fallos $\beta(t) = t$. Entonces la probabilidad de que funcione un tiempo $t \leq 2$ es:

(a) e^{-1}

(b) $1 - e^{-1}$

(c) $1 - e^{-2}$

(d) e^{-2}

48. Sea T una variable aleatoria uniforme en el intervalo $(0, b)$ y media m. Entonces su tasa de fallo β en el instante $t_0 = m$ vale

(a) $\beta(m) = \frac{2}{b}$

(b) $\beta(m) = b$

(c) $\beta(m) = \frac{b}{2}$

(d) $\beta(m) = \frac{1}{b}$

49. Una variable aleatoria discreta X, con función de probabilidad $P_X(k)$ no nula en $k = 0, 1, 2, 3, \ldots$, cumple $P(X = k|X \geq k) = \lambda$ para un cierto $\lambda \in (0, 1)$. Entonces, para $k = 0, 1$ se tiene

(a) $P_X(0) = \lambda$, $P_X(1) = \lambda(\lambda - 1)$

(b) $P_X(0) = 1 - \lambda$, $P_X(1) = \lambda(1 - \lambda)$

(c) $P_X(0) = \lambda$, $P_X(1) = \lambda(1 - \lambda)$

(d) $P_X(0) = \lambda$, $P_X(1) = \lambda^2$

50. Sea T una variable aleatoria continua y positiva, y consideremos las siguientes afirmaciones:

(1) $f_T(t) = \lambda e^{-\lambda t}$ para todo $t > 0$

(2) $F_T(t) = \lambda(1 - e^{-\lambda t})$ para todo $t > 0$

(3) T tiene tasa de fallo constante: $\beta(t) = \lambda$

(4) $f_{T|T>\tau}(t) = f_T(t - \tau)$ para todo $\tau \geq 0$

Entonces, se puede afirmar:

(a) (1) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (3)

(b) (1) $\iff$ (3) $\iff$ (4)

(c) $(1) \Rightarrow (4) \Rightarrow (2)$
(d) $(1) \iff (2)$

51. Sea X una variable aleatoria geométrica con función de probabilidad $P_X(k)$. Entonces la función de probabilidad condicionada $P_{X|X\geq r}(k)$ (donde $r \geq 1$) vale, cuando $k \geq r$:

(a) $P_X(k-r)$
(b) $P_X(k+r)$
(c) pq^{k-r}
(d) pq^{k+r}

52. Una fuente binaria emite los símbolos -1 y 1 con probabilidades $p(-1)$ y $p(1)$ respectivamente. Cuando se envía -1, el receptor recibe $Z = -1 + N$ donde N (ruido) es uniforme en $(-2, 2)$. Análogamente cuando se envía 1. Si $Z > 0$, el receptor decide que se envió 1 y si $Z < 0$, que se envió -1. Entonces la probabilidad de error es:

(a) $1/4$
(b) $1/3$
(c) $\frac{p(1)-p(-1)}{2}$
(d) $\frac{p(1)-p(-1)}{4}$

53. Una moneda con P(`cara`) $= p$ y P(`cruz`) $= q$, $0 < p, q < 1$, se lanza repetidas veces. Sea N el número (v.a.) de lanzamientos hasta que aparecen 2 caras seguidas y $f(k) := \mathrm{P}(N = k)$. Entonces se cumple la recurrencia, para $k > 2$,

(a) $f(k) = qf(k) + pqf(k+2)$
(b) $f(k) = pf(k) + qpf(k+2)$
(c) $f(k) = pf(k-1) + qpf(k-2)$
(d) $f(k) = qf(k-1) + pqf(k-2)$

54. Sea X una variable aleatoria uniforme en $(0, 1)$, que representa la probabilidad de obtener cara con una cierta moneda, es decir $P(\texttt{cara}|X = x) = x$. Suponiendo que se ha obtenido `cara`, hallar la probabilidd de que $X \leq 1/2$.

(a) $1/4$
(b) $3/4$
(c) $x/2$
(d) $5/8$

55. Si X es una variable aleatoria exponencial de media $1/2$, entonces la función de densidad condicionada $f_{X|X\leq 1}$ vale

(a) $2e^{-2(x-1)}$, $x \geq 1$
(b) $\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}(x-1)}$, $x \in [0, 1]$
(c) $2e^{-2x}$, $x \in [0, 1]$
(d) $\frac{2e^{-2(x-1)}}{e^2-1}$, $x \in [0, 1]$

56. Si X es una variable aleatoria exponencial de media $1/2$, entonces la función de densidad condicionada $f_{X|X\geq 1}$ vale

(a) $\frac{2e^{-2(x-1)}}{e^2-1}$, $x \in [0, 1]$
(b) $\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}(x-1)}$, $x \geq 1$
(c) $2e^{-2(x-1)}$, $x \geq 1$
(d) $\frac{2e^{-2x}}{e^2-1}$, $x \geq 1$

Funciones de una variable aleatoria

57. Sea X una variable aleatoria con función de densidad $f_X = 2xe^{-x^2}$, $x > 0$. Entonces la variable aleatoria $Y = X^2$ es

(a) uniforme en $(0, 1)$
(b) con $f_Y(y) = \frac{2}{\pi(1+y^2)}$, $y > 0$
(c) ninguna de las otras
(d) exponencial de media 1

58. Sea X una variable aleatoria continua con función de distribución $F_X(x)$. Entonces la función de distribución $F_Y(y)$ de la v.a. $Y = |X-1|$ vale, para $y \geq 0$:

(a) $F_X(y+1) - F_X(y-1)$
(b) $F_X(1+y) - F_X(1-y)$
(c) $F_X(y-1) - F_X(y+1)$
(d) $F_X(1-y) - F_X(1+y)$

59. Si X es una variable aleatoria uniforme en $[-2, 2]$, entonces la función de densidad de $Y = |X-1|$ es:

(a) $f_Y(y) = 1/3$ $(0 \leq y \leq 3)$
(b) $f_Y(y) = 1/4$ $(0 \leq y \leq 2)$;
$f_Y(y) = 1/2$ $(2 \leq y \leq 3)$

(c) $f_Y(y) = 1/2$ $(0 \leq y \leq 1)$;
$f_Y(y) = 1/4$ $(1 \leq y \leq 3)$

(d) $f_Y(y) = 1/2$ $(0 \leq y \leq 2)$

60. Si X es una variable aleatoria uniforme en $[-2, 2]$, entonces la función de densidad de $Y = |X + 1|$ es:

(a) $f_Y(y) = 1/2$ $(0 \leq y \leq 1)$;
$f_Y(y) = 1/4$ $(1 \leq y \leq 3)$

(b) $f_Y(y) = 1/3$ $(0 \leq y \leq 3)$

(c) $f_Y(y) = 1/4$ $(0 \leq y \leq 2)$;
$f_Y(y) = 1/2$ $(2 \leq y \leq 3)$

(d) $f_Y(y) = 1/2$ $(0 \leq y \leq 2)$

61. Si X es una variable aleatoria continua con función de distribución F_X y función de densidad f_X, entonces la función de densidad de $Y = F_X(X)$ es:

(a) $f_Y(y) = f_X(x)$, $x = F_X^{-1}(y)$

(b) $f_Y(y) = |y|$, $-1 \leq y \leq 1$

(c) $f_Y(y) = 2y$, $0 \leq y \leq 1$

(d) $f_Y(y) = 1$, $0 < y < 1$

62. Sea X una variable aleatoria discreta y considérese la nueva v.a. $Y = g(X)$ donde $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función ("de paso") continua y (estrictamente) decreciente. Si $h := g^{-1}$, la función de distribución de Y es:

(a) $F_Y(y) = 1 - F_X(h(y))$

(b) $F_Y(y) = F_X(h(y))$

(c) $F_Y(y) = [1 - F_X(h(y))]|h'(y)|$

(d) $F_Y(y) = 1 - F_X(h(y)) + \mathrm{P}(Y = y)$

63. Sea X una variable aleatoria de Poisson con esperanza igual a λ. Se define la nueva variable Y mediante la función

$$y = \begin{cases} +1 & \text{si } x \text{ es par} \\ -1 & \text{si } x \text{ es impar.} \end{cases}$$

Entonces, se cumple

(a) $\mathrm{E}(Y) = e^{1/\lambda}$

(b) $\mathrm{P}(Y = 1) = e^{-\lambda} \cosh \lambda$

(c) $\mathrm{P}(Y = -1) = e^{-\lambda} \cosh \lambda$

(d) $\mathrm{E}(Y) = e^{-\lambda}$

64. Sea X una variable aleatoria de Poisson con esperanza igual a λ. Se define la nueva variable Y mediante la función

$$y = \begin{cases} +1 & \text{si } x \text{ es par} \\ -1 & \text{si } x \text{ es impar.} \end{cases}$$

Entonces, se cumple

(a) $\mathrm{E}(Y) = e^{1/\lambda}$

(b) $\mathrm{P}(Y = 1) = e^{-\lambda} \sinh \lambda$

(c) $\mathrm{P}(Y = -1) = e^{-\lambda} \sinh \lambda$

(d) $\mathrm{E}(Y) = e^{-\lambda}$

Momentos

65. Sea X una variable aleatoria de Poisson con esperanza igual a λ. Se define la nueva variable Y mediante la función

$$y = \begin{cases} +1 & \text{si } x \text{ es par} \\ -1 & \text{si } x \text{ es impar.} \end{cases}$$

Entonces, se cumple

(a) $\mathrm{E}(Y) = e^{2/\lambda}$

(b) $\mathrm{E}(Y) = e^{-2/\lambda}$

(c) $\mathrm{E}(Y) = e^{2/\lambda}$

(d) $\mathrm{E}(Y) = e^{-2\lambda}$

66. Sea X una variable aleatoria cuya función de densidad es simétrica respecto al punto c. Entonces se cumple necesariamente que:

(a) La varianza de X es c^2

(b) La media de X es 0

(c) Los momentos centrales impares son nulos

(d) La media de X^2 es c^2

67. Se elige al azar un punto en un segmento de longitud 5. Entonces, el área media del rectángulo cuyos lados son las distancias de dicho punto a los extremos del segmento es:

(a) 25/3

(b) 25/4

(c) 25/5

(d) 25/6

68. Sea N el número de veces que se lanza un dado hasta que sale 6 o la suma de todas las puntuaciones obtenidas es como mínimo 3. Entonces,

(a) $\mathrm{E}(N) = \frac{45}{36}$
(b) $\mathrm{E}(N) = \frac{46}{36}$
(c) $\mathrm{E}(N) = \frac{49}{36}$
(d) $\mathrm{E}(N) = \frac{47}{36}$

69. Si X es una variable aleatoria gausiana $N(m, \sigma)$, su momento central $\mu_{3;X}$ vale

(a) m^3
(b) $\sigma^3 - m^3$
(c) 0
(d) $E(X^3) - m^3$

70. Si X es una variable aleatoria gausiana $N(m, \sigma)$, su momento central $\mu_{4;X}$ vale

(a) $E\{(X-m)^2 X(X-2m)\} + \sigma^2 m^2$
(b) $\sigma^4 - m^4$
(c) 0
(d) $m_4 + 4mm_3 + 4m_2m^2 + m^4$

71. Sea X una variable aleatoria gausiana con $\mathrm{E}(X) = 1$ y $\mathrm{E}(X^2) = 2$. El cálculo del momento central $\mu_{3,X}$ permite deducir que $\mathrm{E}(X^3)$ es

(a) 0
(b) 1
(c) 3
(d) 4

72. Una variable aleatoria tiene como primeros momentos $m_1 = 1$, $m_2 = 3$, $m_3 = 4$ y $m_4 = 1$. ¿Cuál es el valor de su cuarto momento central μ_4?

(a) 0
(b) 1
(c) 3
(d) 2

73. Si X es una variable aleatoria uniforme en $[0, 5]$ e $Y = [X]$ (parte entera de X), la esperanza $E(Y)$ vale

(a) 5/2
(b) 2
(c) 7/2
(d) 3

74. Sea X una variable aleatoria discreta con media m y desviación típica $\sigma = 0$. Entonces se puede afirmar:

(a) $X = m$
(b) $\mathrm{P}(X \neq m) = 0$
(c) $\mathrm{P}(X = 0) = 1$
(d) $\mathrm{P}(X \neq 0) = 1$

75. Si X es una variable aleatoria con media m y varianza σ^2, entonces la variable aleatoria $Y = aX + b$ (con a y b constantes) tiene desviación típica:

(a) $a\sigma$
(b) $a^2\sigma$
(c) $a\sigma^2$
(d) $|a|\sigma$

76. Si X es una variable aleatoria con función de densidad $f_X(x) = \alpha e^{-\lambda|x|}$ (con α, λ constantes positivas). Entonces la varianza de X es:

(a) $2/\lambda$
(b) $1/\lambda^2$
(c) $2/\lambda^2$
(d) $1/\lambda$

77. Sea X es una variable aleatoria exponencial de media m. Entonces, su momento de orden i, m_i, cumple la siguiente fórmula de recurrencia:

(a) $m_i = \frac{i-1}{m} m_{i-1}$
(b) $m_i = \frac{i}{m} m_{i-1}$
(c) $m_i = (i-1) m m_{i-1}$
(d) $m_i = i m m_{i-1}$

78. Una moneda con $P(\texttt{cara}) = P(\texttt{cruz}) = \frac{1}{2}$ se lanza hasta que aparecen tres caras o tres cruces (no necesariamente seguidas). Entonces, el número medio de lanzamientos es:

(a) 4
(b) 33/8
(c) 35/8
(d) 9/2

79. Una moneda con $P(\texttt{cara}) = P(\texttt{cruz}) = \frac{1}{2}$ se lanza hasta que aparecen tres caras o dos cruces (no necesariamente seguidas). Entonces, el número medio de lanzamientos es:

(a) 3
(b) 23/8
(c) 27/8
(d) 25/8

80. Una moneda con $\mathrm{P}(\texttt{cara}) = p \in (0,1)$ y $\mathrm{P}(\texttt{cruz}) = q$, se lanza hasta que aparecen n caras (no necesariamente seguidas). Entonces el número medio de lanzamientos es:

(a) n/p
(b) $1 + (n/p)$
(c) n/q
(d) $1 + (n/q)$

81. Una moneda con $\mathrm{P}(\texttt{cara}) = p = \frac{1}{2}$ y $\mathrm{P}(\texttt{cruz}) = q = \frac{1}{2}$, se lanza hasta que aparecen n caras seguidas. Entonces el número medio de lanzamientos es:

(a) 2^n
(b) n^2
(c) 2^{n-1}
(d) $2^{n+1} - 2$

82. Un examen tipo test consta de $2n$ preguntas con 4 respuestas cada una. En n preguntas hay una sola respuesta válida; y en las otras n hay dos respuestas válidas. Si se pide marcar una sola respuesta en cada pregunta, la "penalización justa" por respuesta falsa (si se responde al azar la nota media tiene que ser 0) debe ser:

(a) $-3/5$
(b) $-3/8$
(c) $-5/8$
(d) $-1/3$

83. Una moneda con $\mathrm{P}(\texttt{cara}) = \mathrm{P}(\texttt{cruz}) = \frac{1}{2}$ se lanza hasta que se obtiene una puntuación mínima de 10 puntos, donde cada vez que sale cara se suman 4 puntos y cada vez que sale cruz se suman 3 puntos. Entonces, el número medio de lanzamientos es:

(a) 25/8
(b) 23/8
(c) 3
(d) 43/16

84. El voltaje V en una resistencia de 1 ohmio es una variable aleatoria con función de densidad $f_V(v) = 2ve^{-v^2}$ $(v \geq 0)$. Entonces la función de densidad de la potencia en el punto 1 es:

(a) $2e$
(b) e
(c) $1/e$
(d) $1/2e$

85. Sea X una variable continua positiva con función de densidad $f_X(x)$ y función de distribución $F_X(x)$. Entonces, interpretando la esperanza de X como la integral doble

$$\mathrm{E}(X) = \int_0^\infty y f_X(y)\, dy = \int_0^\infty \int_0^y f_X(y)\, dx dy$$

se obtiene la igualdad

(a) $\mathrm{E}(X) = \int_0^\infty [F_X(x)]\, dx$
(b) $\mathrm{E}(X) = \int_0^\infty [1 - F_X(x)]\, dx$
(c) $\mathrm{E}(X) = \int_0^\infty [1 + F_X(x)]\, dx$
(d) $\mathrm{E}(X) = \int_0^\infty [F_X(x) - \frac{1}{2}]\, dx$

86. Sea X una variable aleatoria discreta que toma los valores $0, 1, 2, \ldots$. Entonces $\mathrm{E}(X)$ se puede calcular con la serie

(a) $\sum_{k=0}^\infty \mathrm{P}(X > k)$
(b) $\sum_{k=0}^\infty k\mathrm{P}(X > k)$
(c) $\sum_{k=0}^\infty k\mathrm{P}(X \leq k)$
(d) $\sum_{k=0}^\infty \mathrm{P}(X \leq k)$

87. Si X es una variable aleatoria positiva, entonces se cumple que, para cualquier constante $k \in \mathbb{R}^+$,

(a) $P(X \geq k) \leq \frac{E(X)}{k}$
(b) $P(X \geq k) \geq \frac{E(X)}{k}$
(c) $P(X \leq k) \leq \frac{E(X)}{k}$
(d) $P(X \leq k) \geq \frac{E(X)}{k}$

88. Si X es una variable aleatoria negativa, entonces se cumple que, para cualquier constante negativa $k \in \mathbb{R}^-$,

(a) $P(X \geq k) \leq \frac{E(X)}{k}$
(b) $P(X \geq k) \geq \frac{E(X)}{k}$
(c) $P(X \leq k) \leq \frac{E(X)}{k}$
(d) $P(X \leq k) \geq \frac{E(X)}{k}$

89. Sea X una variable aleatoria discreta con media $m > 0$ y varianza σ^2. Entonces la desigualdad de Tchebycheff $\mathrm{P}(|X-m| \geq k) \leq \sigma^2/k^2$ implica:

(a) $\mathrm{P}(X \in \{0, 2m\}) < \frac{\sigma^2}{m^2}$
(b) $\mathrm{P}(X \in \{0, 2m\}) \leq \frac{\sigma^2}{m^2}$
(c) $\mathrm{P}(X \in \{0, 2m\}) > \frac{\sigma^2}{m^2}$
(d) $\mathrm{P}(X \in \{0, 2m\}) \geq \frac{\sigma^2}{m^2}$

90. Sea X una variable aleatoria discreta que toma valores en los enteros no negativos. Entonces, para $k \geq 1$, se cumple la desigualdad:

(a) $\mathrm{P}(X \geq k) \geq \mathrm{E}(X)/k$
(b) $\mathrm{P}(X \geq k) \leq \mathrm{E}(X)/k$
(c) $\mathrm{P}(X \leq k) \geq \mathrm{E}(X)/k$
(d) $\mathrm{P}(X \leq k) \leq \mathrm{E}(X)/k$

91. Sea X es una variable aleatoria de media cero y varianza σ. Entonces, para cualquier constante $k \in \mathbb{R}^+$, se cumple que:

(a) $P(|X| < k) \geq 1 - \frac{\sigma^2}{k^2}$
(b) $P(|X| \geq k) \geq 1 - \frac{\sigma^2}{k^2}$
(c) $P(|X| < k) \leq 1 - \frac{\sigma^2}{k^2}$
(d) $P(|X| \geq k) \leq 1 - \frac{\sigma^2}{k^2}$

92. Sea X es una variable aleatoria de media cero y varianza σ^2. Entonces, para cualquier constante $k \in \mathbb{R}^+$, se cumple que:

(a) $P(|X| < k) \geq \frac{\sigma^2}{k^2}$
(b) $P(|X| \geq k) \leq \frac{\sigma^2}{k^2}$
(c) $P(|X| \geq k) \geq \frac{\sigma^2}{k^2}$
(d) $P(|X| < k) \leq \frac{\sigma^2}{k^2}$

93. Dado un suceso A con probabilidad $\mathrm{P}(A)$, la variable aleatoria *indicadora* de A, I_A, se define como $I(\omega) = 1$ si $\omega \in A$ y $I(\omega) = 0$ si $\omega \in \overline{A}$. Entonces una de las siguientes afirmaciones es falsa:

(a) $\mathrm{E}(I_A) = \mathrm{P}(A)$
(b) $\mu_{2,I_A} = \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(\overline{A})$
(c) $\mathrm{E}(I_A^2) = \mathrm{P}(A)$
(d) $\mu_{3,I_A} = \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(\overline{A})(1 + \mathrm{P}(A))$

94. Sea X una variable aleatoria continua con media $m > 0$ y varianza σ^2. Entonces la desigualdad de Tchebycheff implica:

(a) $P(X \leq 0) \leq \frac{\sigma^2}{m^2}$
(b) $P(X \leq 0) \geq \frac{\sigma^2}{m^2}$
(c) $P(X \geq 2m) \geq \frac{\sigma^2}{m^2}$
(d) $P(|X - m| \geq m) \geq \frac{\sigma^2}{m^2}$

95. Un experimento consiste en lanzar diez dados y sumar las puntuaciones obtenidas. Entonces la media de esta suma es:

(a) 45
(b) 35
(c) 40
(d) 30

96. Un experimento consiste en lanzar diez dados y sumar las puntuaciones pares obtenidas. Entonces la media de esta suma es:

(a) 20
(b) 25
(c) 22
(d) 15

97. Se lanzan n dados. La probabilidad de que el dado $i = 1, 2, 3 \ldots$ saque un 6 es p^i, $p = 1 - q < 1$. Entonces, el número medio de 6's obtenidos cuando $n \to \infty$ es:

(a) p^2/q
(b) q^2/p
(c) p/q
(d) q/p

98. Dos jugadores A,B con fortunas respectivas m y n euros lanzan repetidamente una moneda equilibrada de manera que, si sale cara, A gana y recibe 1 euro de B, mientras que, si sale cruz, gana B y recibe 1 euro de A. El juego termina cuando unos de los dos jugadores se arruina. Entonces la probabilidad $\mathrm{P}(m)$ de que gane el juego A es:

(a) $\frac{|m-n|}{m+n}$

(b) $\frac{n}{m+n}$

(c) $\frac{m}{m+n}$

(d) $\frac{\sqrt{m}}{m+n}$

99. Se lanzan simultáneamente dos dados normales. Si la puntuación de cada dado es mayor que 2 y la suma de puntuaciones es menor que 10, entonces la probabilidad de que algún dado saque un 4 es:

(a) 1/2

(b) 2/3

(c) 7/10

(d) 9/26

Función característica

100. Sea X una variable aleatoria continua con función característica $M_X(\omega)$. Entonces se cumple

$$\mathrm{P}(a \leq X \leq b) = \frac{1}{2\pi j} \int_{-\infty}^{\infty} h(\omega) M_X(\omega)\, d\omega$$

donde $h(\omega)$ es:

(a) $\frac{1}{\omega}(e^{-j\omega b} - e^{-j\omega a})$

(b) $\frac{1}{\omega}(e^{j\omega b} - e^{j\omega a})$

(c) $\frac{1}{\omega}(e^{-j\omega a} - e^{-j\omega b})$

(d) $\frac{1}{\omega}(e^{j\omega a} - e^{j\omega b})$

101. Si X es una variable aleatoria continua con función característica $M_X(\omega)$. Entonces la función característica de la variable aleatoria $Y = \frac{1}{a}X - b$, con $a, b \in \mathbb{R}^+$, es:

(a) $M_Y(\omega) = M_X(\frac{\omega}{a} - b)$

(b) $M_Y(\omega) = e^{j\omega b} M_X(a\omega)$

(c) $M_Y(\omega) = \frac{1}{a} e^{-j\omega b} M_X(\omega)$

(d) $M_Y(\omega) = e^{-j\omega b} M_X(\frac{\omega}{a})$

102. Sea X una variable aleatoria con función de densidad $f_X(x)$ y función característica $M_X(\omega)$. Entonces una de las siguientes afirmaciones es falsa:

(a) $|M_X(\omega)| \leq 1$

(b) $M_X(\omega)$ es una función real de ω si $f_X(x)$ es par

(c) La media de X es $M_X(0)$

(d) $f_X(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} M_X(\omega)\, d\omega$

103. Si X es una variable aleatoria discreta que sólo toma valores en los enteros, su función característica se define como

$$M_X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} P_X(n) e^{j\omega n}$$

Entonces, con la notación $M_X^{(i)} := \frac{\partial^i}{\partial \omega^i} M_X$, el momento de orden $i \in \{1, 2, \ldots\}$ de X es:

(a) $m_i = \frac{1}{j^i} M_X^{(i)}(0)$

(b) $m_i = j^i M_X^{(i)}(0)$

(c) $m_i = \frac{1}{j^{(i+1)}} M_X^{(i)}(0)$

(d) $m_i = \frac{1}{j^i} M_X^{(i+1)}(0)$

104. Si X es una variable aleatoria de Poisson con parámetro λ, su función característica es:

(a) $e^{\lambda(\sin\omega - 1) + j\sin\omega}$

(b) $e^{\lambda(\cos\omega - 1) - j\sin\omega}$

(c) $e^{\lambda(\cos\omega + 1) + j\cos\omega}$

(d) $e^{\lambda(\cos\omega - 1) + j\sin\omega}$

Soluciones

1. Como A, B son disjuntos, $\mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(\emptyset) = 0$. Además, por ser independientes, $\mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$. Por lo tanto, si $\mathrm{P}(A) \neq 0$, se cumple $\mathrm{P}(B|A) = \mathrm{P}(A \cap B)/\mathrm{P}(A) = 0$ (b).

2. (c).

3. (b).

4. (c).

5. Desarrollando la probabilidad $\mathrm{P}(A \cap [B \cup C])$, y usando que $\mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$, $\mathrm{P}(A \cap C) = \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(C)$, y $\mathrm{P}(A \cap [B \cap C]) = \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B \cap C)$, se obtiene

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(A \cap [B \cup C]) &= \mathrm{P}([A \cap B] \cup [A \cap C]) \\
&= \mathrm{P}(A \cap B) + \mathrm{P}(A \cap C) \\
&- \mathrm{P}(A \cap B \cap C) \\
&= \mathrm{P}(A)[\mathrm{P}(B) + \mathrm{P}(C) - \mathrm{P}(B \cap C)] \\
&= \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B \cup C) \quad \text{(d).}
\end{aligned}$$

6. (b).

7. Sean A, B, C los sucesos que representan el que un programa tenga errores de sintáxis, de I/O y de otro tipo, respectivamente; con $\mathrm{P}(A) = 20/100$, $\mathrm{P}(B) = 10/100$, etc. Nos piden entonces la probabilidad de que un mensaje contenga algún tipo de error, es decir, $\mathrm{P}(E) = \mathrm{P}(A \cup B \cup C)$, que se puede calcular aplicando la fórmula de inclusión-exclusión,

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(E) &= \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) + \mathrm{P}(C) \\ &\quad -\mathrm{P}(A \cap B) - \mathrm{P}(A \cap B) - \mathrm{P}(A \cap B) \\ &\quad +\mathrm{P}(A \cap B \cap C) \\ &= \frac{1}{100}(35 - 11 + 1) = 0.25 \quad \text{(b).} \end{aligned}$$

8. Desarrollando la expresión, se obtiene:

$$\begin{aligned} & \frac{\mathrm{P}(A \cap B \cap C)}{\mathrm{P}(B \cap C)} \frac{\mathrm{P}(B \cap C)}{\mathrm{P}(C)} \\ + \; & \frac{\mathrm{P}(A \cap B \cap \overline{B} \cap C)}{\mathrm{P}(\overline{B} \cap C)} \frac{\mathrm{P}(\overline{B} \cap C)}{\mathrm{P}(C)} \\ = \; & \frac{\mathrm{P}(A \cap B \cap C)}{\mathrm{P}(C)} + \mathrm{P}(\emptyset) = \mathrm{P}(A \cap B | C) \quad \text{(a).} \end{aligned}$$

9. Desarrollando la expresión obtenemos:

$$\begin{aligned} & \frac{\mathrm{P}(A \cap B \cap C)}{\mathrm{P}(B \cap C)} \frac{\mathrm{P}(B \cap C)}{\mathrm{P}(C)} \\ + \; & \frac{\mathrm{P}(A \cap \overline{B} \cap C)}{\mathrm{P}(\overline{B} \cap C)} \frac{\mathrm{P}(\overline{B} \cap C)}{\mathrm{P}(C)} \\ = \; & \frac{\mathrm{P}([A \cap C \cap B] \cup [A \cap C \cap \overline{B}])}{\mathrm{P}(C)} \\ = \; & \frac{\mathrm{P}(A \cap C)}{\mathrm{P}(C)} = \mathrm{P}(A|C) \quad \text{(b).} \end{aligned}$$

10. (c).

11. (a).

12. (d).

13. El jugador C gana el juego cuando los sucesivos ganadores de las partidas cuarta, quinta, sexta,. . . , son CCC, BCCC, CBCC o CCBC. Por tanto, la probabilidad de que C gane se obtiene sumando las probabilidades de los sucesos anteriores:

$$\mathrm{P(C)} = \frac{1}{3^3} + \frac{3}{3^4} = \frac{2}{3^3} \quad \text{(b).}$$

14. Sea A el suceso "existe conexión" y A_i, $1 \leq i \leq n$, el suceso "el interruptor i-ésimo está cerrado". Entonces,

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(A) &= 1 - \mathrm{P}(\overline{A}) \\ &= 1 - \mathrm{P}(\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \cdots \cap \overline{A_n}) \\ &= 1 - \mathrm{P}(\overline{A_1})\mathrm{P}(\overline{A_2}) \cdots \mathrm{P}(\overline{A_n}) \\ &= 1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \approx 1 - e^{-1} \quad \text{(d).} \end{aligned}$$

15. (c).

16. Sea A_i, $1 \leq i \leq n$, el suceso "los n puntos están sobre una semicircunferencia y el primer punto que se encuentra cuando se recorre la circunferencia en el sentido antihorario (partiendo de cualquier punto de la otra semicircunferencia) es el i-ésimo". Entonces, al ser A_1, A_2,. . . , A_n sucesos disjuntos, la probabilidad pedida es

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(A_1 \cup \cdots \cup A_n) &= \mathrm{P}(A_1) + \cdots + \mathrm{P}(A_n) \\ &= n\mathrm{P}(A_1) = n(\tfrac{1}{2})^{n-1} \quad \text{(a).} \end{aligned}$$

17. Tres puntos no alineados determinan un plano que corta a la esfera en dos trozos, al menos uno de los cuales es menor o igual a una semiesfera. Por tanto la respuesta correcta es (b).

18. (d).

19. La probabilidad pedida se puede calcular con el cociente entre el número de casos favorables y el de casos posibles. Es decir,

$$\frac{2 \cdot 7!}{9!} = \frac{1}{36} \quad \text{(d).}$$

20. (c).

21. Los números consecutivos pueden ser $1, 2, 3, 4$, $2, 3, 4, 5$, $\ldots$, $9, 10, 11, 12$ (en total 9 casos). Además, el número de formas en que podemos asignar palos distintos a cada uno de dichos conjuntos de números es 4! Por tanto, el cociente entre el número de casos favorables y el de casos posibles es ahora:

$$\frac{9 \cdot 4!}{\binom{48}{4}} = 0.0011\ldots \quad \text{(d).}$$

22. (a).

23. Sea E el suceso "recibir un mensaje erróneo". Entonces, como la probabilidad de recibir un bit correctamente es $q = 1-p$ y se reciben 500 bits,

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(E) &= 1-\mathrm{P}(\overline{E}) = 1-(1-p)^{500} \\ &= 1-\left(1-\binom{500}{1}p+\binom{500}{2}p^2-\cdots\right) \\ &\approx 500p = 0.005 \quad \text{(b)}. \end{aligned}$$

24. (a)

25. Sean A y B los sucesos "al menos un as" y "al menos un rey", respectivamente. Entonces, considerando la probabilidad del suceso complementario y aplicando las leyes de DeMorgan,

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(A\cap B) &= 1-\mathrm{P}(\overline{A\cap B}) = 1-\mathrm{P}(\overline{A}\cup\overline{B}) \\ &= 1-[\mathrm{P}(\overline{A})+\mathrm{P}(\overline{B})-\mathrm{P}(\overline{A}\cap\overline{B})] \\ &= 1-\left[2\frac{\binom{44}{5}}{\binom{48}{5}}-\frac{\binom{40}{5}}{\binom{48}{5}}\right] \approx 0.116 \quad \text{(a)}. \end{aligned}$$

26. Sea T_i, $1 \le i \le 5$, el suceso "el terminal i solicita transmitir". Entonces, la probabilidad de que el primer terminal preguntado no quiera transmitir pero el segundo sí es:

$$\mathrm{P}(\overline{T_1}\cap T_2) = \mathrm{P}(\overline{T_1})\mathrm{P}(\cap T_2|\overline{T_1}) = \frac{2}{5}\frac{3}{4} = \frac{3}{10} \quad \text{(a)}.$$

27. Supongamos que k de las n hermanas tienen los ojos azules. Entonces, la probabilidad de encontrarse con dos que los tengan es, según el enunciado:

$$\frac{\binom{k}{2}}{\binom{n}{2}} = \frac{k(k-1)}{n(n-1)} = \frac{1}{2}.$$

Para los valores dados de n, esta ecuación sólo tiene solución con $n=4$ y $k=3$ (b).

28. Según los datos, tenemos las siguientes probabilidades:
$\mathrm{P}(0) = \mathrm{P}(1) = \frac{1}{2}$,
$\mathrm{P}(b|0) = 2\mathrm{P}(a|0) \Rightarrow \mathrm{P}(a|0) = \frac{1}{3}$, $\mathrm{P}(b|0) = \frac{2}{3}$,
$\mathrm{P}(a|1) = \mathrm{P}(b|1) = \frac{1}{2}$.
Así, utilizando la fórmula de Bayes,

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(0|a) &= \frac{\mathrm{P}(a|0)\mathrm{P}(0)}{\mathrm{P}(a|0)\mathrm{P}(0)+\mathrm{P}(a|1)\mathrm{P}(1)} \\ &= \frac{\frac{1}{3}\frac{1}{2}}{\frac{1}{3}\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\frac{1}{2}} = \frac{2}{5} \quad \text{(b)}. \end{aligned}$$

29. Para acertar exactamente 12 resultados con dicha apuesta deben salir (exactamente) dos signos diferentes de 1. De ahí se obtiene que la respuesta correcta es (d).

30. Para acertar exactamente 13 resultados con dicha apuesta debe salir (exactamente) un signo diferente de 1, que puede ser una X o un 2 en cualquier posición de las 14 posibles. Por tanto,

$$P(13) = 14\frac{1}{2^3}\left(\frac{3}{10}+\frac{1}{5}\right) = \frac{14}{2^4} \quad \text{(c)}.$$

31. (a).

32. Consideremos los sucesos A: "extraer 2 bolas blancas y 1 negra"; y B_i ($0 \le i \le 5$): "la bolsa contiene i bolas blancas (y, por tanto, $5-i$ bolas negras)". Entonces $\mathrm{P}(B_i) = \binom{5}{i}(\frac{1}{2})^5$ y, suponiendo que $2 \le i \le 4$,

$$\mathrm{P}(A|B_i) = \frac{\binom{i}{2}\binom{5-i}{1}}{\binom{5}{3}}.$$

(En otro caso, obviamente, $\mathrm{P}(A|B_i) = 0$). Con esta notación, notar que nos piden la probabilidad $P(B_2|A)$, que la podemos calcular aplicando la fórmula de Bayes:

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(B_2|A) &= \frac{\mathrm{P}(A|B_2)\mathrm{P}(B_2)}{\sum_{i=2}^4 \mathrm{P}(A|B_i)\mathrm{P}(B_i)} \\ &= \frac{\binom{2}{2}\binom{3}{1}\binom{5}{2}}{\binom{2}{2}\binom{3}{1}\binom{5}{2}+\binom{3}{2}\binom{2}{1}\binom{5}{3}+\binom{4}{2}\binom{1}{1}\binom{5}{4}} \\ &= \frac{1\cdot 3\cdot 10}{1\cdot 3\cdot 10+3\cdot 2\cdot 10+6\cdot 1\cdot 5} \\ &= \frac{1}{4} \quad \text{(d)}. \end{aligned}$$

33. (c).

34. Sea Ω el suceso seguro y D_k el suceso "el número es divisible por k". Entonces,
$\Omega = \{1, 2, 3\ldots, 24n\}$;
$D_6 = \{6, 2\cdot 6, 3\cdot 6, \ldots, 4n\cdot 6\}$, $\mathrm{P}(D_6) = \frac{4n}{24n} = \frac{1}{6}$;
$D_8 = \{8, 2\cdot 8, 3\cdot 8, \ldots, 3n\cdot 8\}$, $\mathrm{P}(D_8) = \frac{3n}{24n} = \frac{1}{8}$;
$D_{24} = \{24, 2\cdot 24, 3\cdot 24\ldots, n\cdot 24\}$;
$\mathrm{P}(D_6\cap D_8) = \mathrm{P}(D_{24}) = \frac{n}{24n} = \frac{1}{24}$. Por tanto,

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(D_6\cup D_8) &= \frac{1}{6}+\frac{1}{8}-\frac{1}{24} \\ &= \frac{4+3-1}{24} = \frac{1}{4} \quad \text{(c)}. \end{aligned}$$

35. Calculemos las diferentes posibilidades:

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(X=n-1) &= \mathrm{P}(\text{blanca de A \& negra de B}) \\
&= \frac{m}{N}\frac{n}{N} = \frac{mn}{N^2} \\
\mathrm{P}(X=n+1) &= \mathrm{P}(\text{negra de A \& blanca de B}) \\
&= \frac{n}{N}\frac{m}{N} = \frac{nm}{N^2} \\
\mathrm{P}(X=n) &= 1-\mathrm{P}(X\in\{n-1,n+1\}) \\
&= 1-\frac{2mn}{N^2} \quad \text{(d)},
\end{aligned}$$

o también,

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(X=n) &= \mathrm{P}(\text{blanca de A \& blanca de B}) \\
&+ \mathrm{P}(\text{negra de A \& negra de B}) \\
&= \frac{m^2+n^2}{N^2} = \frac{(m+n)^2-2mn}{N^2} \\
&= 1-\frac{2mn}{N^2} \quad \text{(d)}.
\end{aligned}$$

36. (a).

37. (d).

38. Consideremos los sucesos B, N (bola blanca o negra de la primera caja) y nB (n bolas blancas de la segunda caja). Aplicando la fórmula de Bayes,

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(N|nB) &= \frac{\mathrm{P}(nB|N)\mathrm{P}(N)}{\mathrm{P}(nB|B)\mathrm{P}(B)+\mathrm{P}(nB|N)\mathrm{P}(N)} \\
&= \frac{\frac{n}{2n+1}\frac{n-1}{2n}\cdots\frac{1}{n+1}\frac{1}{2}}{\frac{n+1}{2n+1}\frac{n}{2n}\cdots\frac{2}{n+1}\frac{1}{2}+\frac{n}{2n+1}\frac{n-1}{2n}\cdots\frac{1}{n+1}\frac{1}{2}} \\
&= \frac{n!}{(n+1)!+n!} = \frac{1}{n+2} \approx 0 \quad \text{(b)}.
\end{aligned}$$

39. (b).

40. (c).

41. El valor de α tiene que ser positivo porque, de lo contrario, $F_X(+\infty) \neq 1$. Además, $P(X = a) = F_X(a^+) - F_X(a^-) = 1 - e^{\alpha a}$. Por tanto, la respuesta correcta es (d).

42. (d).

43. Notar que $F_X(1^-) = F_X(1^+) = 1$. Por tanto $P(X = 1) = 0$, y la afirmación falsa es (c).

44. (a).

45. (c).

46. (b).

47. (c).

48. Como $f_T(t) = \alpha$ (constante) y $\int_0^b f_T(t)\,dt = 1$, resulta que $f_T(t) = 1/b$ para todo $t \in (0, b)$ y $f_T(t) = 0$ en otro caso; con lo cual $m = \mathrm{E}(T) = b/2$. Por tanto, la tasa de fallo es

$$\begin{aligned}
\beta(t) &= \lim_{\Delta t\to\infty} \frac{\mathrm{P}(t<T\le t+\Delta t)}{\mathrm{P}(T>t)} \\
&= \frac{f_T(t)}{\int_t^b f_T(\tau)\,d\tau} \\
&= \frac{1/b}{\int_t^b (1/b)\,d\tau} = \frac{1}{b-t} \qquad (0<t<b),
\end{aligned}$$

de donde se obtiene $\beta(b/2) = \frac{2}{b}$ (a).

49. (c).

50. (b).

51. La función de probabilidad de X es $P_X(k) = pq^{k-1}$, $k \geq 1$. Entonces, aplicando la fórmula de la probabilidad condicionada, y suponiendo que $k \geq r$, obtenemos:

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}_{X|X\ge r}(k) &= \mathrm{P}(X=k\,|\,X\ge r) \\
&= \frac{\mathrm{P}(X=k, X\ge r)}{\mathrm{P}(X\ge r)} \\
&= \frac{\mathrm{P}(X=k)}{\mathrm{P}(X\ge r)} = \frac{pq^{k-1}}{p\sum_{\kappa=r}^{\infty} q^{\kappa-1}} \\
&= \frac{q^{k-1}}{(q^{r-1})/(1-q)} = pq^{k-r} \quad \text{(c)}.
\end{aligned}$$

52. A partir de la fórmula de la probabilidad total, la probabilidad de error es:

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(\epsilon) &= \mathrm{P}(\epsilon|-1)p(-1)+\mathrm{P}(\epsilon|1)p(1) \\
&= \mathrm{P}(N>1)p(-1)+\mathrm{P}(N<-1)p(1),
\end{aligned}$$

donde

$$\mathrm{P}(N>1) = \int_1^2 f_N(n)\,dn = \frac{1}{4}$$

y, análogamente, $\mathrm{P}(N < -1) = \frac{1}{4}$. Por tanto, el cálculo anterior da

$$\mathrm{P}(\epsilon) = \frac{p(-1)+p(1)}{4} = \frac{1}{4} \quad \text{(a)}.$$

53. Como suponemos que $N \geq 3$, ocurre uno de los dos siguientes sucesos: "+", es decir, `cruz` en el primer lanzamiento; o bien "c+", es decir, `cara` en el primer lanzamiento y `cruz` en el segundo. Aplicando el teorema de la probabilidad total, condicionando por los sucesos anteriores, tenemos

$$\begin{aligned} f(k) &= \mathrm{P}(N=k) \\ &= \mathrm{P}(N=k|+)\mathrm{P}(+) + \mathrm{P}(N=k|\mathtt{c}+)\mathrm{P}(\mathtt{c}+) \\ &= f(k-1)q + f(k-2)pq \quad \text{(d).} \end{aligned}$$

54. (a).

55. (d).

56. (c).

57. (d).

58. A partir de la definición de $F_Y(y)$, se obtiene:

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= \mathrm{P}(Y \leq y) = \mathrm{P}(|X-1| \leq y) \\ &= \mathrm{P}(1-y \leq X \leq 1+y) \\ &= F_X(1+y) - F_X(1-y) \quad \text{(b).} \end{aligned}$$

59. (c).

60. (a).

61. Notar que Y sólo toma valores en el intervalo $[0,1]$, donde su función de probabilidad es:

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P(Y \leq y) = P(F_X(X) \leq y) \\ &= P(X \leq F_X^{-1}(y)) \\ &= F_X(F_X^{-1}(y)) = y. \end{aligned}$$

Por tanto, $f_Y(y) = F'_Y(y) = 1$, $y \in (0,1)$, (variable aleatoria uniforme) (d).

62. Aplicando la definición de función de distribución y teniendo en cuenta que g es decreciente,

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= \mathrm{P}(Y \leq y) = \mathrm{P}(X \geq x) \\ &= 1 - \mathrm{P}(X < x) \\ &= 1 - F_X(x) + \mathrm{P}(X = x) \\ &= 1 - F_X(h(y)) + \mathrm{P}(Y = y) \quad \text{(d);} \end{aligned}$$

donde hemos usado que $x = h(y)$ y considerado que, por ser X discreta, la probabilidad $\mathrm{P}(X = h(y))$ puede ser no nula.

63. Por ser X de Poisson con media λ, su función de probabilidad es $P_X(k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$, $k = 0,1,2,\ldots$ Por tanto,

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(Y=1) &= \sum_{\kappa=0}^{\infty} P(X = 2\kappa) \\ &= e^{-\lambda}\left(1 + \frac{\lambda^2}{2!} + \frac{\lambda^4}{4!} + \cdots\right) \\ &= e^{-\lambda}\cosh\lambda \quad \text{(b).} \end{aligned}$$

64. Por ser X de Poisson con media λ, su función de probabilidad es $P_X(k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$, $k = 0,1,2,\ldots$ Por tanto,

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(Y=-1) &= \sum_{\kappa=0}^{\infty} P(X = 2\kappa+1) \\ &= e^{-\lambda}\left(\lambda + \frac{\lambda^3}{3!} + \frac{\lambda^5}{5!} + \cdots\right) \\ &= e^{-\lambda}\sinh\lambda \quad \text{(c).} \end{aligned}$$

65. Usando los cálculos de las dos preguntas anteriores, obtenemos:

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(Y) &= 1\cdot\mathrm{P}(Y=1) + (-1)\cdot\mathrm{P}(Y=-1) \\ &= e^{-\lambda}[\cosh\lambda - \sinh\lambda] = e^{-2\lambda} \quad \text{(d).} \end{aligned}$$

66. (c).

67. Sea X la variable aleatoria uniforme en $[0,5]$ que denota el punto elegido. Entonces $f_X(x) = \frac{1}{5}$, $0 \leq x \leq 5$; y el área del rectángulo es la variable aleatoria $A = X(5-X)$. Por tanto, usando el teorema de la esperanza,

$$\begin{aligned} E(A) &= \frac{1}{5}\int_0^5 x(5-x)\,dx \\ &= \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{15}\right]_0^5 = \frac{25}{6} \quad \text{(d).} \end{aligned}$$

68. Sean $i_1 i_2 i_3 \ldots$ las diferentes puntuaciones obtenidas. Entonces, los diferentes casos con sus probabilidades respectivas son:
$\mathrm{P}(N=1) = \mathrm{P}(6,5,4,3) = 4\cdot\frac{1}{6}$;
$\mathrm{P}(N=2) = \mathrm{P}(12,13,\ldots,16,21,22,\ldots,26) = 11\cdot\frac{1}{6^2}$;
$\mathrm{P}(N=3) = \mathrm{P}(111,112,\ldots,116) = \frac{6}{6^3}$.
Por lo tanto,

$$\mathrm{E}(N) = \sum_{n=1}^{3} n\mathrm{P}(N=n) = \frac{4}{6} + \frac{22}{6^2} + \frac{3}{6^2} = \frac{49}{36} \quad \text{(c).}$$

69. (c).

70. (a).

71. Como los momentos centrales de orden impar de una gaussiana son nulos, tenemos que

$$\begin{aligned} 0 &= \mu_{3,X} = \mathrm{E}\{(X-1)^3\} \\ &= \mathrm{E}(X^3) - 3\mathrm{E}(X^2) + 3\mathrm{E}(X) - 1 \\ &= \mathrm{E}(X^3) - 6 + 3 - 1, \end{aligned}$$

de donde $\mathrm{E}(X^3) = 4 \quad$ (d).

72. Usando que $\mathrm{E}(X) = m_1 = 1$, el cálculo del momento central de orden 4 da:

$$\begin{aligned} \mu_4 &= \mathrm{E}\{(X-1)^4\} \\ &= \mathrm{E}(X^4) - 4\mathrm{E}(X^3) + 6\mathrm{E}(X^2) - 4E(X) + 1 \\ &= m_4 - 4m_3 + 6m_2 - 4 + 1 \\ &= 1 - 16 + 18 - 3 = 0 \quad \text{(a)}. \end{aligned}$$

73. (b).

74. (b).

75. (d).

76. (c).

77. Sabemos que X tiene función de densidad $f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}$, $x > 0$, para un cierto $\lambda \in \mathbb{R}^+$. Entonces, el momento m_i de orden $i \geq 0$ se calcula mediante la integral

$$m_i := E(X^i) = \int_0^\infty x^i \lambda e^{-\lambda x}\, dx.$$

Suponiendo que $i \geq 1$, podemos integrar por partes con

$$\begin{aligned} u &= x^i, & du &= ix^{i-1} \\ dv &= \lambda e^{-\lambda x}\, dx, & v &= -e^{-\lambda x} \end{aligned}$$

y se obtiene la recurrencia

$$\begin{aligned} m_i &= \left[-x^i e^{-\lambda x}\right]_0^\infty + i\int_0^\infty x^{i-1} e^{-\lambda x}\, dx \\ &= \frac{i}{\lambda} m_{i-1}. \end{aligned}$$

Por tanto, como $m_0 = 1$, resulta que la media es $m = m_1 = 1/\lambda$ y, en general,

$$m_i = imm_{i-1} \quad \text{(d)}.$$

78. Sea X el número de lanzamientos hasta que aparecen las tres caras o las tres cruces. Entonces,las diferentes posibilidades son: ccc ($X = 3$); +ccc, c+cc, cc+c ($X = 4$); ++ccc, +c+cc, +cc+c, c+c+c, c++cc, cc++c ($X = 5$); y las que se obtienen a partir de las anteriores intercambiando c y +. Por tanto, la media es:

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(X) &= 3 \cdot \frac{2}{2^3} + 4 \cdot \frac{6}{2^4} + 5 \cdot \frac{12}{2^5} \\ &= \frac{6}{8} + \frac{24}{16} + \frac{60}{32} = \frac{33}{8} \quad \text{(b)}. \end{aligned}$$

79. (c).

80. Sea N_i, $1 \leq i \leq n$, la variable aleatoria que representa el número de lanzamientos hasta que aparecen i caras. Entonces, para todo i, $X_i := N_i - N_{i-1}$ (con $N_0 := 0$) es una variable geométrica con media $\mathrm{E}(X_i) = \frac{1}{p}$. Por tanto:

$$\mathrm{E}(N_n) = \mathrm{E}\left\{\sum_{i=1}^n X_i\right\} = \sum_{i=1}^n \mathrm{E}(X_i) = \frac{n}{p} \quad \text{(a)}.$$

81. Sea X_n la variable aleatoria que representa el número de lanzamientos hasta que aparecen n caras seguidas. Entonces, considerando los casos posibles que ocurren después de obtener $n-1$ caras seguidas, obtenemos la recurrencia (con la notación $\mathrm{E}(n) := \mathrm{E}(X_n)$):

$$\mathrm{E}(n) = [\mathrm{E}(n-1) + 1]p + [\mathrm{E}(n-1) + 1 + \mathrm{E}(n)]q$$

de donde

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(n) &= \frac{1}{p}\mathrm{E}(n-1) + \frac{1}{p} \\ &= \frac{1}{p^2}\mathrm{E}(n-2) + \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p} \\ &= \frac{1}{p^{n-1}}\mathrm{E}(1) + \sum_{\nu=1}^{n-1} \frac{1}{p^\nu} \\ &= \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{p^\nu} = \frac{\frac{1}{p} - \frac{1}{p^{n+1}}}{1 - \frac{1}{p}} \\ &= \frac{p}{q}\left(\frac{1}{p^{n+1}} - \frac{1}{p}\right) = 2^{n+1} - 2 \quad \text{(d)}; \end{aligned}$$

donde hemos usado que X_1 es una variable aleatoria geométrica (y, por tanto, $\mathrm{E}(1) = \frac{1}{p}$) y $p = q = \frac{1}{2}$.

82. (a).

83. (a).

84. (c).

85. Intercambiando el orden de integración de la integral doble, obtenemos:

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(X) &= \int_0^\infty \int_0^y f_X(y)\,dxdy \\ &= \int_0^\infty \int_x^\infty f_X(y)\,dydx \\ &= \int_0^\infty \mathrm{P}(X \geq x)\,dx \\ &= \int_0^\infty [1 - F_X(x)]\,dx \quad \text{(b).} \end{aligned}$$

86. Esta cuestión puede considerarse como la versión discreta de la anterior. En efecto,

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(X) &= \sum_{n=0}^\infty n P_X(n) = \sum_{n=1}^\infty n P_X(n) \\ &= \sum_{n=1}^\infty \sum_{k=0}^n P_X(n) = \sum_{k=1}^\infty \sum_{n=k}^\infty P_X(n) \\ &= \sum_{k=1}^\infty \mathrm{P}(X \geq k) = \sum_{k=0}^\infty \mathrm{P}(X > k) \quad \text{(a).} \end{aligned}$$

(O también, $\mathrm{E}(X) = \sum_{k=0}^\infty [1 - F_X(k)]$).

87. (a).

88. (c).

89. Aplicando la citada desigualdad, se obtiene:

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(X \in \{0, 2m\}) &\leq \mathrm{P}(X \leq 0, X \geq 2m) \\ &= \mathrm{P}(|X - m| \geq m) \leq \frac{\sigma^2}{m^2} \quad \text{(b).} \end{aligned}$$

90. La desigualdad puede interpretarse como la versión discreta de la desigualdad de Tchebycheff, y se obtiene de forma análoga:

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(X) &= \sum_{x=0}^\infty x\mathrm{P}(X = x) \geq \sum_{x=k}^\infty x\mathrm{P}(X = x) \\ &\geq k \sum_{x=k}^\infty \mathrm{P}(X = x) = k\mathrm{P}(X \geq k), \end{aligned}$$

de donde se obtiene (b).

91. (a).

92. (b).

93. A es una variable de Bernouilli con $p = \mathrm{P}(A)$ y $p = \mathrm{P}(\overline{A})$. Por tanto,

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(I_A) &= \mathrm{E}(I_A^2) = 1 \cdot p + 0 \cdot q = p, \\ \mu_{2,I_A} &= \mathrm{E}(I_A^2) - \mathrm{E}(I_A)^2 = p - p^2 = pq. \end{aligned}$$

Por tanto, la respuesta falsa tiene que ser (d).

94. (a).

95. (b).

96. (a).

97. Sea X_i la puntuación sacada por el dado i, y consideremos la v.a. indicadora I_i que vale 1 si $X_i = 6$ y 0 en caso contrario. Entonces, el número de 6's cuando $n \to \infty$ es $N := X_1 + X_2 + X_3 + \cdots$ y su media resulta:

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(N) &= \mathrm{E}\left(\sum_{i=1}^\infty I_i\right) = \sum_{i=1}^\infty \mathrm{E}(I_i) \\ &= \sum_{i=1}^\infty \mathrm{P}(X_i = 6) = \sum_{i=1}^\infty p^i \\ &= \frac{p}{1-p} = \frac{p}{q} \quad \text{(c).} \end{aligned}$$

98. Observando el resultado del primer lanzamiento, tenemos la siguiente fórmula de recurrencia

$$\mathrm{P}(m) = \frac{1}{2}\mathrm{P}(m+1) + \frac{1}{2}\mathrm{P}(m-1)$$

(donde $\mathrm{P}(k)$ denota la probabilidad de que gane A cuando tiene k euros y, por tanto, B tiene $m + n - k$ euros). Así,

$$\mathrm{P}(m+1) = 2\mathrm{P}(m) - \mathrm{P}(m-1).$$

Probando con soluciones del tipo r^m (ecuación de recurrencia con coeficientes constantes) se obtienen soluciones del tipo $\mathrm{P}(m) = \alpha m + \beta$, con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Finalmente, de las "condiciones de contorno" $\mathrm{P}(0) = 0$ y $\mathrm{P}(m+n) = 1$ se obtiene, respectivamente, que $\beta = 0$ y $\alpha = \frac{1}{m+n}$. Por tanto, la respuesta correcta es (c).

Una resolución alternativa es la siguiente. Como se trata de un juego justo, la ganancia media de cada jugador debe ser nula. Así, considerando el jugador A (que gana n con probabilidad $\mathrm{P}(m)$ y pierde m con la probabilidad complementaria):

$$n\mathrm{P}(m) + (-m)[1 - \mathrm{P}(m)] = 0$$

de donde se obtiene (c).

99. Este es un problema típico de los que resolvemos mediante la fórmula de Bayes. En casos sencillos como el presente, también es posible obtener la solución a partir de la fórmula clásica (# casos favorables / # casos posibles). En efecto, notemos primero que la probabilidad de que el primer dado saque i y el segundo saque j es $\mathrm{P}(i,j) = \frac{1}{6^2}$, $1 \leq i, j \leq 6$ (casos equiprobables). Entonces, bajo las condiciones citadas, los casos posibles son 10, a saber:

$$\begin{array}{llll} (3,3) & (3,4) & (3,5) & (3,6) \\ (4,3) & (4,4) & (4,5) & \\ (5,3) & (5,4) & & \\ (6,3) & & & \end{array}$$

de los cuales hay 5 en los que algún dado saca 4. Por tanto, la probabilidad condicionada que nos piden es 1/2 (a).

100. El cálculo de la probabilidad anterior $\mathrm{P} := \mathrm{P}(a \leq X \leq b)$ da

$$\begin{aligned} \mathrm{P} &= \int_a^b f_X(x)\, dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_a^b \int_{-\infty}^{\infty} M_X(\omega) e^{-j\omega x}\, d\omega\, dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} M_X(\omega)\, d\omega \int_a^b e^{-j\omega x}\, dx \\ &= \frac{1}{2\pi j} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\omega} (e^{-j\omega a} - e^{-j\omega b}) M_X(\omega)\, d\omega \end{aligned}$$

(c).

101. El cálculo de la nueva función característica es

$$\begin{aligned} M_Y(X) &= \mathrm{E}(e^{j\omega Y}) = \mathrm{E}(e^{j\omega(\frac{1}{a}X - b)}) \\ &= e^{-j\omega b} \mathrm{E}(e^{j\frac{\omega}{a}X}) \\ &= e^{-j\omega b} M_X\left(\frac{\omega}{a}\right) \quad \text{(d).} \end{aligned}$$

102. (c).

103. (a).

104. (d).